



TITLE:

側壁加熱された流体系に現れる波動 (大自由度・強非線形の波動現象の数理)

AUTHOR(S):

八幡, 英雄

CITATION:

八幡, 英雄. 側壁加熱された流体系に現れる波動 (大自由度・強非線形の波動現象の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1092: 53-56

ISSUE DATE:

1999-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62933>

RIGHT:

側壁加熱された流体系に現れる波動

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)

垂直におかれた長方形領域 $\{(x, y) | 0 < x < L, 0 < y < H\}$ (ここで重力を y 軸の負の向きにとる) の側壁を一様に加熱して水平方向に一様な温度勾配を加えたとき、内部を満たす流体に現れる運動を考察する。速度場 \mathbf{v} は各境界壁で滑りなしの境界条件 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ (ただし、 ∂_n は壁面に垂直方向への微分を表す) を満たし、温度場 T は左右垂直壁で等温的、上下水平壁で断熱的境界条件 $T(0, y) = T_1, T(L, y) = T_2$ ($0 < y < H$); $\partial_y T(x, 0) = \partial_y T(x, H) = 0$ ($0 < x < L$) を満たしているとする。以下、便宜上 $T_1 > T_2$ とする。速度場 \mathbf{v} 、温度場 T 、圧力場 P の従う運動方程式は、Boussinesq 近似の下で

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(P/\rho) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha(T - T_2)g\mathbf{e}_y \quad (1)$$

$$\partial_t T + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

の形をとる。ここで、 ρ は流体の平均密度、 ν は動粘性率、 κ は温度伝導率、 α は熱膨張係数、 g は重力加速度、 \mathbf{e}_y は y 軸方向の単位ベクトルを表す。この方程式は、変数の尺度変換: $x \rightarrow (L/2)x, y \rightarrow (H/2)y, \mathbf{v} \rightarrow U\mathbf{v}, T \rightarrow T_2 + (T_1 - T_2)\theta, P/\rho \rightarrow U^2 P/\rho$ (ただし、 $U = \alpha g(T_1 - T_2)L^2/4\nu$) によって無次元化すると、領域 $\{(x, y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ 上で定義された次の形となる:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{G}{8}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{G}{8} \nabla \frac{P}{\rho} + \nabla^2 \mathbf{v} + \theta \mathbf{e}_y \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{G}{8}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\nabla = (\partial_x, (1/A)\partial_y)$ で、 $A = H/L$ は系のアスペクト比を表す。境界条件は、速度場 \mathbf{v} に対して境界で $\mathbf{v} = \partial_n v_n = 0$; 温度場 θ に対して、 $\theta(-1, y) = 1, \theta(1, y) = 0$ ($-1 < y < 1$); $\partial_y \theta(x, -1) = \partial_y \theta(x, 1) = 0$ ($-1 < x < 1$) となる。この方程式は、2 個の無次元パラメータ: Grashof 数 $G = \alpha g(T_1 - T_2)L^3/\nu^2$ と Prandtl 数 $Pr = \nu/\kappa$ によって特徴づけられている。ただし、 G の代わりに Rayleigh 数 $R = GPr$ もよく用いられる。

ここで、流れ関数 Ψ を導入し $u = -(1/A)\partial_y \Psi, v = \partial_x \Psi$ と表して圧力 P を消去し、さらに関係式 $\theta(x, y, t) = (1-x)/2 + \Theta(x, y, t)$ によって両側垂直壁において斉次境界条件 $\Theta(\pm 1, y) = 0$ ($-1 < y < 1$) を満たす温度場 Θ を導入すると、場の変数 Ψ, Θ に対する運動方程式は

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} + \nabla^4 \Psi + \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{G}{8A} \frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial(x, y)} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{G}{16A} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta - \frac{G}{8A} \frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(x, y)} \quad (8)$$

となる。本研究においては、これを Galerkin 法によって有限次元常微分方程式系で近似した系を導き、simulation および線形安定解析によりその解の時空間構造を明らかにすることを試みた。

この系はベナール対流と異なって、水平方向温度差 $\Delta T = T_1 - T_2$ がゼロでなければ閾値なしに、高温壁に沿って上昇し低温壁に沿って下降する単純ループ状の定常対流が流れる。さらに、 ΔT すなわち R を増加していくと上昇流・下降流は垂直壁付近に集中して境界層が発達し、一方領域の内部では流れは緩やかになり温度的安定成層が形成される。このため十分大きな R では、境界層が不安定化し垂直壁に沿って Tollmien-Schlichting(TS) 波を発生する可能性があり、実際 simulation によってある閾値 R_{ts} 以上でその実現が確かめられている。一方安定成層中には内部重力波が伝播しうるが、Paolucci & Chenoweth は実際 simulation により、プラントル数 $Pr = 0.71$ の系でアスペクト比が小さい場合 ($A \lesssim 3$) には、 R を増加したときある閾値 R_{ig} 以上で最初に不安定化して現れる振動は内部重力波であることを示した。¹⁾ つまり、 $Pr = 0.71$ の系では $A \lesssim 3$ では内部重力波、 $A \gtrsim 3$ では TS 波が R を増加したとき定常対流状態が不安定

化して最初に出現する振動モードである。さらに、内部重力波を発生する定常対流状態は単純なループ状の流れ(これをここでは以下略して SL 状態とよぶ: 図 1(a) 参照)ではなく、垂直方向の上昇流・下降流が垂直壁に衝突して水平方向に向きを変える場所で跳水 (hydraulic jump) を伴っている流れ(これをここでは HJ 状態とよぶ: 図 1(b) 参照)であることが明らかにされている。跳水によって水平方向高速流が急激に減速されるとき放出されるエネルギーが十分大きいと非定常運動をひきおこし、これがこの系では内部重力波の形で現れる。

本研究ではこれらの異なる不安定性の構成する分岐構造を、線形安定性理論により詳しくしらべた。原著論文は近く他雑誌に掲載される予定なので、²⁾ ここでは結果のみを簡単に記すことにする。

計算は $Pr = 0.71, 1 < A < 10$ に対して行った。図 2 はこの系の (A, R) 空間での相図を、2 つの振動モード発生の臨界 Rayleigh 数が交差する付近で描いたものである。ここで領域 α, β ではそれぞれ SL, HJ 定常対流状態が現れる。曲線 R_{ts}, R_{ig} はそれぞれ SL および HJ 状態が不安定化して TS 波および内部重力波を発生する境界線を示す。したがって領域 ϵ では振動状態が卓越する。領域 γ は SL および HJ からなる多重定常状態、 δ は定常的 SL 状態および内部重力波による振動状態からなる多重状態であり、それぞれどちらの状態が卓越するかは初期条件によって決まる。一方曲線 R_{hj} は SL から HJ への、また R_{tp} は HJ から SL への流れの空間構造の不連続的遷移点の集合である。したがって楔形の領域 γ の左端の点 $c(A_c \simeq 2.8, R_c \simeq 1.76 \times 10^6)$ は臨界点であって、 R を増加したとき、 $A < A_c$ では SL より HJ への遷移は連続的に起こるが、 $A > A_c$ では不連続的であって R を減少させるときヒステリシスを伴う。このようにこの系では、SL および HJ の 2 種の定常対流状態と、TS 波および内部重力波の 2 種の振動状態が競争的に共存するかなり複雑な分岐構造を示すことがわかった。

参考文献

- 1) S. Paolucci and D.R. Chenoweth: J. Fluid Mech. **201**(1989), 379.
- 2) H. Yahata: to appear in J. Phys. Soc. Jpn **68**(1999), No. 2.

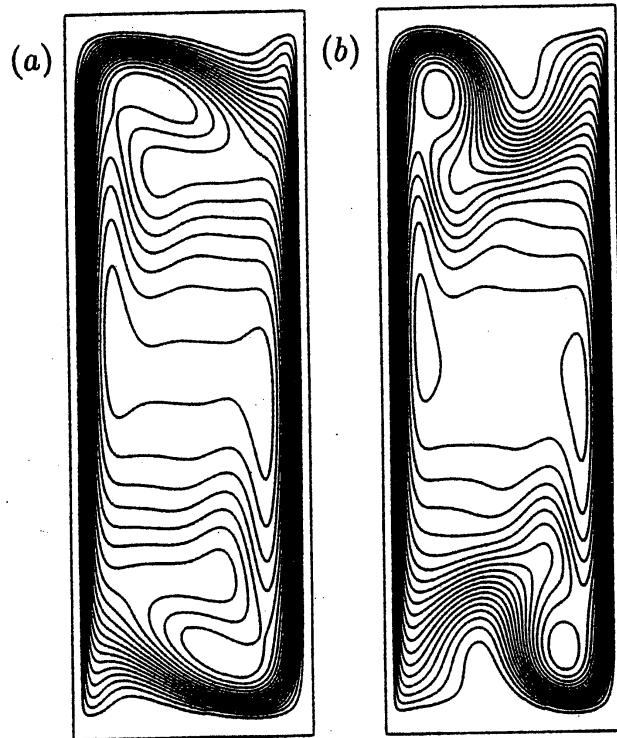


図 1. 定常対流の二つの状態の流線 ($A = 3$): (a) SL 状態: $R = 1.5 \times 10^6$, (b) HJ 状態: $R = 2.5 \times 10^6$.

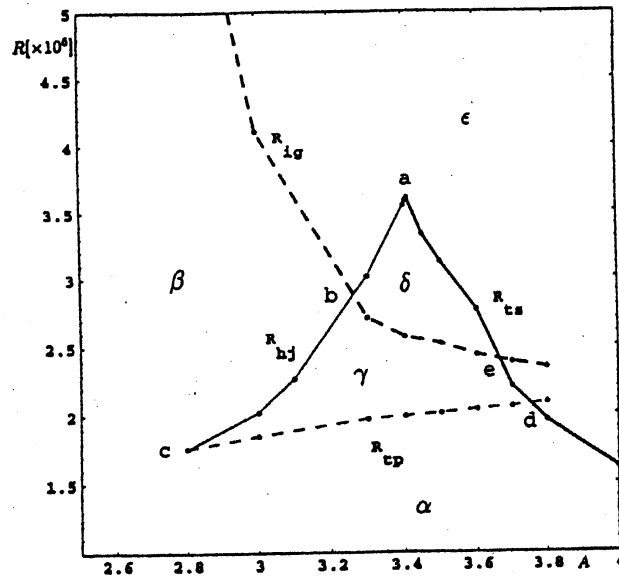


図 2. 安定性ダイアグラム: (α) 定常 SL 状態、(β) 定常 HJ 状態、(γ) 定常 SL または HJ 状態、(δ) 定常 SL 状態または内部重力波振動状態、(ϵ) 振動状態 (TS 波または内部重力波).